量子客体上的博弈：从大学理科二年级到研究前沿的一个演示

吴金闪

北京师范大学管理学院系统科学系

July 19, 2011

提纲

1. 基础：线性代数、概率论、力学的思想
2. 经典概率论的密度矩阵形式
3. 量子力学简介（态叠加原理与密度矩阵）
4. 量子博弈的定义
5. 量子博弈之于经典博弈
6. 可供研究的问题
7. 致谢，参考文献

线性代数

1. 有限维矢量空间，基矢，分量，新的符号（Dirac记号）。以二维矢量空间为例，取正交归一基矢
$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$
任意矢量可以做展开，
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle\,. \tag{2}$$
矢量之间的内积可以通过（复）共轭转置来计算，例如，$|1\rangle$的共轭转置（记为$\langle 1|$）为
$$\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$
因此，$\langle 1|\,1\rangle = 1$，$\langle 1|\,0\rangle = 1$。
2. 矩阵的本征值和本征矢量，不同本征值所对应的本征矢量相互正交，所有本征矢量的集合可以做为空间的正交归一基矢，基矢的选择不唯一。例如可以取$|\uparrow,\downarrow\rangle = \frac{|1\rangle \pm |0\rangle}{\sqrt{2}}$。

经典概率论

1. 离散事件的概率（经典概型），基本事件$\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$，观测量$A|_{\Omega \to \mathbb{R}}$。通常记号：状态矢量与观测量

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

期望

$$\langle A \rangle = A^T P = \sum_i a_i p_i. \tag{5}$$

2. 新的符号：状态的密度矩阵记号与观测量的矩阵

$$\rho = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

期望

$$\langle A \rangle = tr\left(AP\right) = \sum_i a_i p_i. \tag{7}$$

力学

1. 力学的基本思想：
    - 运动学：描述物体的状态，状态的变化
    - 动力学：什么导致的状态的变化
2. 例子，硬币的状态与翻硬币
    - 最一般的硬币状态：

$$\rho_0 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

    - 硬币状态的变化，翻的操作记为$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，作用$X|1\rangle = |0\rangle$等等。一般而言，

$$\rho_f = X\rho_0 X^\dagger \tag{9}$$

    - 观测量，正面赢钱，$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则收益为

$$E^A = tr(A\rho). \tag{10}$$

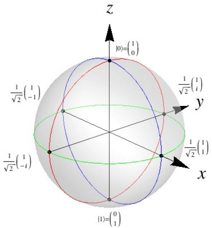
量子力学

1. 量子态：Hilbert矢量空间$\mathcal{H}$，密度矩阵（$\rho \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$）
2. 状态的演化（幺正算符，$U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$）与物理量（厄米算符，$H \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$）的平均值：

$$\rho_f = U \rho_0 U^{\dagger}, \tag{11}$$

$$E = tr(\rho H). \tag{12}$$

3. 态叠加原理：$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \alpha|\phi\rangle + \beta|\psi\rangle \in \mathcal{H}$。**思考：硬币能处于$|1\rangle + |0\rangle$吗？**。这一性质导致密度矩阵的非对角元：例子，处于x方向向上态的自旋：



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \rho^q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

量子力学与经典概率论对比

1. 经典概率论的矩阵形式：对角化的密度矩阵，方程(9)和(10)与方程(11)和(12)一样。例子，处于正反各半的硬币：

$$\rho^c = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|. \tag{14}$$

2. 量子态$|\uparrow\rangle = \frac{|1\rangle+|0\rangle}{\sqrt{2}}$，

$$\rho^q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|\right). \tag{15}$$

3. "$|1\rangle\langle 0|$"称为非对角元，是量子力学区别于经典力学的唯一地方。
4. 为什么量子力学的数学形式是这样的，不讲，达到真正理解量子力学，唯一还要搞懂的问题。

经典博弈

1. 博弈：多个体的有利益冲突的决策行为，行为预测，机制设计
2. 博弈的解：纯策略与混合策略，**混合策略Nash均衡的存在性**
3. 例子：翻硬币游戏的通常的抽象定义：$\Gamma^c = \left(S^1 \otimes S^2, G^{1,2}\right)$，
   - 策略（$S^{1,2} = \{I, X\}$，对应不翻，翻）
   - 支付矩阵（$G^{1,2}$）

$$G^1 = \left[\begin{array}{c|cc} & I & X \\ \hline I & 1 & -1 \\ X & -1 & 1 \end{array}\right] = -G^2, \tag{16}$$

   - 收益（$E^{1,2}$）

$$E^i = \left(P^1\right)^T G^i P^2, \tag{17}$$

其中P^i为参与者i的混合策略**几率分布矢量**。例如

$$P^1 = \left[\begin{array}{c} p^1 \\ 1 - p^1 \end{array}\right]. \tag{18}$$

经典博弈续

1. 翻硬币游戏的操作性定义：$\gamma^c = \left(\rho_0^c, \mathcal{U}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{H}), \mathcal{L}, \mathcal{G}^{1,2}\right)$
   - 初态，$\rho_0^c \in \mathcal{H}$，初态向上$\rho^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   - 操作，$S^{1,2} = \mathcal{U}(\mathcal{H}), S = S^1 \otimes S^2$，$S = \{I, X\}$
   - 算符操作，$\mathcal{L}| : S \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$，$\mathcal{L}(s^1, s^2) = s^2 s^1$，1先2后
   - 收益函数，$\{\mathcal{G}^{1,2}\}$

$$\mathcal{G}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathcal{G}^2 \tag{19}$$

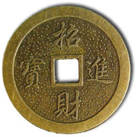
   - 则收益为

$$E^i = tr\left(\mathcal{L}\rho_0^c \mathcal{L}^\dagger \mathcal{G}^i\right). \tag{20}$$

2. 操作性定义和通常抽象定义是完全等价的。

量子博弈的操作性定义

1. 把硬币换成自旋，当作博弈的客体



$\longrightarrow$

2. 量子博弈的操作性定义$\gamma^q = \left(\rho_0^q, \mathcal{U}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{H}), \mathcal{L}, \mathcal{G}^{1,2}\right)$，与经典博弈的操作性定义相同，唯一的不同在于$\rho_0^q$代替了$\rho_0^c$。
3. 第一个不同：纯策略集更大了[1]，$Z_2 \longrightarrow SU(2)$。
4. 经典博弈也可以有无穷多个（或者连续的）纯策略。混合策略在博弈论中有特殊的地位。
5. 什么是量子混合策略：更大策略集上的概率分布？来自传统经典博弈论研究者的批评[2]。

经典与量子博弈的新的抽象定义

1. 看不见客体，只看见策略，**混合策略**
2. 经典博弈的新的抽象定义，$\Gamma^{c,new}=\left\{S^1\otimes S^2, H^{1,2}\right\}$，混合策略：$\rho^c=\rho^{c,1}\otimes\rho^{c,2}$，收益：$E^{1,2}=tr\left(\rho^c H^{1,2}\right)$。例子，翻硬币：

$$\rho^{c,i}=\begin{bmatrix} p^i & 0 \\ 0 & 1-p^i \end{bmatrix}, H^1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}=-H^2 \qquad (21)$$

3. 量子博弈的抽象定义：

$$\Gamma^{q,new}=\left\{S^1\otimes S^2, H^{1,2}\right\}, \qquad (22)$$

混合策略：$\rho^q=\rho^{q,1}\otimes\rho^{q,2}$，收益：$E^{1,2}=tr\left(\rho^q H^{1,2}\right)$。**非对角的$\rho^q$与非对角的$H^{1,2}$，真正的不同**。

例子：量子翻硬币博弈（自旋博弈）

1. 量子混合策略：密度矩阵和支付矩阵的非对角元，无穷个事件上的几率分布函数之于有限维密度矩阵，量子力学之于经典力学
2. 原因：策略的叠加原理。经典策略$\alpha I+\beta X$不是东西，但是量子策略$\frac{I+iX}{\sqrt{2}}\in SU(2)$，是一个有意义的策略。（出现这样的混合策略：$-i\left|I\right)\left(X\right|$）。
3. 例子，翻自旋：

$$H^{1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
i & 0 & 0 & i & 0 & i & 1 & 0 & 0 & -1 & i & 0 & i & 0 & 0 & i\\
0 & 1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & i & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
-i & 0 & 0 & -i & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & -i & 0 & 0 & -i\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -i & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -i & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.$$

量子博弈进一步研究的方向

1. 纠缠的量子客体初态
2. 纠缠的博弈者，用量子态作为策略的载体，以及这样做的问题
3. 更加广义的策略，局部测量，$S^i \supset \mathcal{U}(\mathcal{H})$
4. 密度矩阵形式（而不是概率分布形式的）的Nash均衡?
5. 趋向均衡的道路，演化量子博弈问题

Final Take-Home Message：量子博弈之于经典博弈就是量子力学之于经典力学

参考文献

1. D.A. Meyer, *Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. **82**(1999), 1052-1055.
2. S.J. van Enk and R. Pike, *Classical rules in quantum games*, Phys. Rev. A **66**(2002), 024306.
3. J. Wu, Hamiltotian Formalism of Game Theory, arXiv: quant-ph/0501088.
4. H. Guo, J. Zhang and G.J. Koehler, *A survey of quantum games*, Decision Support Systems, **46**(2008), 318-332.

致谢

- 感谢会议暑期学校的组织者
- 得益于与裴寿镛老师的诸多讨论